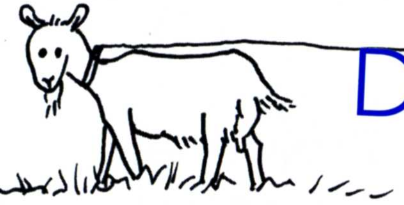


DE SLAK EN HET ELASTIEK

door Klaas Pieter Hart

In een weiland staat een geit. De geit wordt 's avonds met een stuk elastiek van 10 meter lang vastgebonden aan een boom. Op de halsband van de geit zit een slak, die over het elastiek naar de boom toe wil kruipen. De slak kruipt alleen 's nachts: elke nacht kruipt de slak 10 cm in de richting van de boom. Maar elke dag loopt de geit al grazend 10 meter bij de boom vandaan. Het elastiek rekt gelijkmatig mee op. Vraag: bereikt de slak ooit de boom?

Onmogelijk?

Op het eerste gezicht lijkt het onmogelijk dat de slak ooit de andere zijde van het elastiek bereikt. Maar bedenk dat de afgelegde afstand mee oprekt: de 10 cm die de slak de eerste nacht heeft afgelegd, is na de eerste dag opgerekt tot 20 cm. Na twee nachten heeft de slak 20 + 10 = 30 cm afgelegd, en in de loop de tweede dag rekt het elastiek op van 20 naar 30 meter. De door de slak afgelegde afstand wordt zodoende 3/2 groter. Daarom heeft de slak na twee nachten en twee dagen al 45 cm afgelegd. Enzovoort. Wat denk je, is dit genoeg om ooit de overkant van het elastiek te bereiken?

Relatieve afstandswinst

We berekenen welk gedeelte van het elastiek de slak overbrugt. De 10 centimeter van de eerste nacht is 1% van het elastiek. Hoe ver het elastiek ook oprekt, de op de eerste dag afgelegde afstand blijft 1% van het elastiek uitmaken; het elastiek rekt immers overal even-veel uit. In de tweede nacht is het elastiek 20 meter lang, en legt de slak weer 10 centimeter af. Dit geeft een blijvende afstandswinst van $\frac{1}{2}\%$. De derde nacht is het elastiek 30 meter lang en kruipt de slak weer 10 centimeter, een afstandswinst van $\frac{1}{3}\%$. Na 10 nachten en dagen heeft de slak dus $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}\%$ van het elastiek overbrugd, en in het algemeen, na n nachten en dagen:

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\tfrac{1}{n}\,\%.$$

Na 10 nachten en dagen heeft de slak 2,9% afgelegd, na 100 nachten en dagen 5,2% en na 1000 nachten en dagen 7,5%. Wat denk je, zal de slak ooit de overkant bereiken of niet?

Nicole Oresmes berekening

Voor het probleem van de slak willen we dus weten of $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\,\%$ ooit het hele elastiek wordt, dat wil zeggen, of $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ ooit 100 wordt. Eigenlijk willen we dus weten hoe groot de getallen $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ kunnen worden. In de veertiende eeuw ontdekte Nicole Oresme dat deze getallen willekeurig groot kunnen worden.
Dat deed hij via een omweg. Als n een macht van 2 was, kon hij de optelling op een handige manier in groepjes verdelen. Voor $n = 2^3$ kreeg hij bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned}
&1+\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8})\\
&\quad>1+\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8})\\
&\quad=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\\
&\quad=1+3\cdot\tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

In het algemeen kon Oresme zo inzien dat $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}>1+k\cdot\frac{1}{2}$.

oo Harmonische reeks

De oneindige som

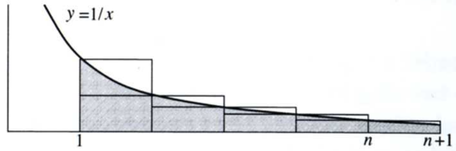
$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\cdots$$

staat bekend als de *harmonische reeks*.
Deze reeks heeft geen eindige uitkomst, want uit Nicole Oresmes berekening volgt dat we, als we n maar groot genoeg nemen, de som $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ net zo groot kunnen krijgen als we maar willen. In het bijzonder krijgen we op een gegeven moment: $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>100$.
De slak bereikt dus uiteindelijk de boom!

Hoe lang?

Uit de berekening van Nicole Oresme volgt dat $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{198}}>100$. Na 2^{198} nachten en dagen is de slak dus zeker bij de boom.
Hij is er eigenlijk al veel eerder, omdat $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^k}$ echt groter is dan $1+\frac{1}{2}k$.
Met integraalrekening kunnen we een veel betere schatting van $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ geven en zodoende veel nauwkeuriger bepalen wanneer de slak bij de boom aangekomen zal zijn.
In figuur 1 vergelijken we $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ met de oppervlakte onder de grafiek van $y = 1/x$.
We lezen af dat $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ groter is dan de oppervlakte onder de grafiek van $y = 1/x$ tussen $x = 1$ en $x = n + 1$.
Anderzijds is $\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ kleiner dan de oppervlakte van $y=\frac{1}{x}$ tussen $x = 1$ en $x = n$. Deze oppervlakte kunnen we als volgt uitrekenen:

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^n = \ln n.$$



Figuur 1. Vergelijking van $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ met de oppervlakte onder de grafiek van $y = 1/x$.

We vinden dus $\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ en $\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<\ln n$. Omdat $\ln n < \ln(n + 1)$ krijgen we:

$$\ln n<1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{n}<1+\ln n.$$

De getallen $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ stijgen dus net zo snel als de natuurlijke logaritme $\ln n$.
Hiermee kunnen we uitrekenen wanneer de slak bij de boom is. Dat is het geval voor $\ln n < 100 < 1 + \ln n$, dus voor $99 < \ln n < 100$.
Hieruit volgt dat n tussen e^{99} en e^{100} ligt.

Opgave. Na ongeveer e^{100} dagen heeft de slak de boom bereikt. Hoeveel decimalen heeft dit getal. En hoeveel jaar is dit?

Gamma

Leonhard Euler onderzocht het verschil tussen $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ en $\ln n$. Hij ontdekte dat $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ naar een vaste waarde convergeert. Die waarde wordt genoteerd met γ en is ongeveer 0.5772156649. Je kunt wereldberoemd worden door vast te stellen of γ een breuk is of juist niet.