

De Cantitruncated 600 cel

Afgeknotte icosahedrische
prismatohexacosihecatonicosachoron



Paul van de Veen
info@vandeveen.nl

januari 2013

I. De 5 Platonische lichamen

In *één* dimensie bestaan alleen maar lijnen.

Met meerdere lijnen kunnen we in het platte vlak, dus in *twee* dimensies verschillende figuren maken zoals driehoeken, vierkanten, vijfhoeken, zeshoeken, enz.

Dit zijn regelmatige *veelhoeken*.

In *drie* dimensies zoals onze wereld lijkt te zijn bestaan er ook regelmatige figuren.

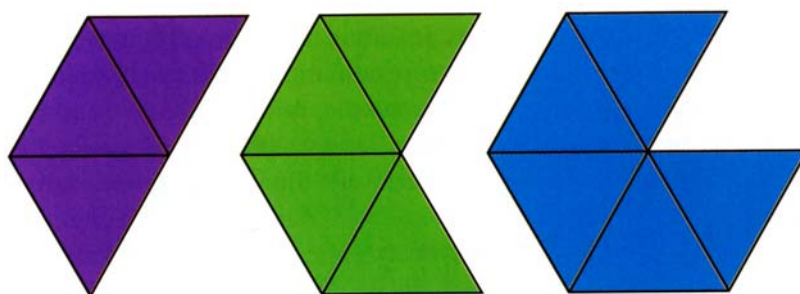
Met een aantal driehoeken kunnen we verschillende regelmatige *ruimtelijke* figuren, *drie*-dimensionale figuren maken. Het kan ook met vierkanten, met vijfhoeken. Maar niet met zeshoeken!

Dat wisten de Grieken al. Zij zeiden:

- I. In een hoekpunt moeten altijd minstens drie vlakken samenkomen. Eén zijvlak per hoekpunt zou immers betekenen dat je een vlak hebt, en twee zijvlakken per hoekpunt levert nooit een volledig gesloten figuur op.
- II. In een hoekpunt moet de som van de hoeken altijd kleiner zijn dan 360° . Want anders is er geen ruimte om te vouwen rond de hoek.

Met deze twee gegevens kunnen we de regelmatige veelhoeken systematisch afgaan.

- Als we regelmatige veelvlakken met **driehoeken** willen maken hebben we nog maar drie mogelijkheden: 3, 4 of 5 driehoeken per hoekpunt.

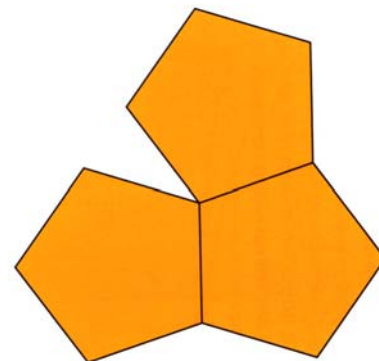


- Met drie **driehoeken** in een hoekpunt krijgen we de tetraëder.
 - Met vier **driehoeken** in een hoekpunt de octaëder.
 - Met vijf **driehoeken** de icosaeëder.
- Als we regelmatige veelvlakken met **vierhoeken** willen maken hebben we maar één mogelijkheid, namelijk 3 vierhoeken per hoekpunt: de kubus.

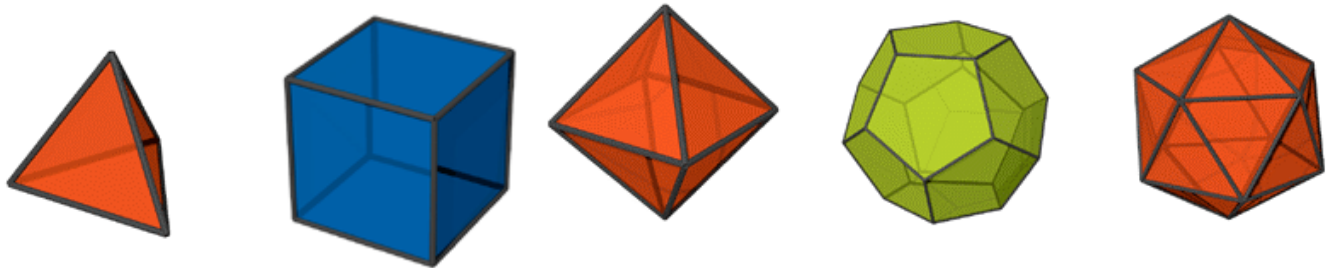
- Als we regelmatige veelvlakken met **vielhoeken** willen maken hebben we ook maar één mogelijkheid, namelijk 3 vijfhoeken per hoekpunt: de dodecaëder.
Meer kan niet: 4 vijfhoeken levert een hoekensom van $4 \cdot 108 = 432$ graden. Te veel dus.

- Met drie **zeshoeken** gaat het gelijk al fout. De hoekensom is precies 360° . Met de zeshoek kan er géén regelmatig veelvlak gemaakt worden met 3 zeshoeken per hoekpunt.

- De veelhoeken die op de zeshoek volgen hebben alleen nog maar grotere hoeken. Hiermee kunnen dus ook geen regelmatige veelvlakken gevormd worden.



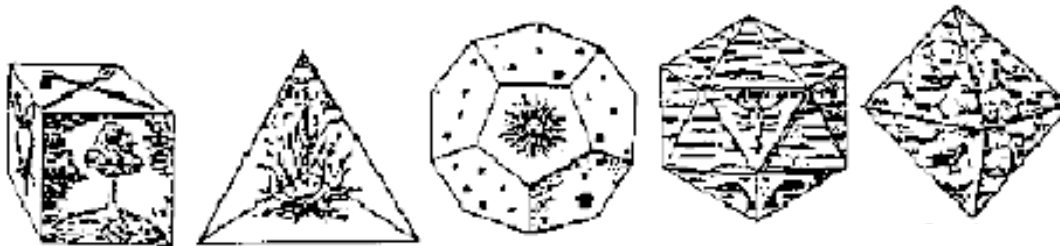
En zo is het bewijs geleverd dat er in 3 dimensies slechts 5 regelmatige *veel-vlakken* bestaan. (in het Grieks *poly-ëder*), de tetraëder, de kubus, de octaëder, de dodecaëder en de icosaeëder.



Het 4 -vlak (Tetraëder)	Het 6 -vlak (Hexaëder)	Het 8 -vlak (Octaëder)	Het 12 -vlak Dodecaëder)	Het 20 -vlak) (Icosaëder
3 driehoeken in elk hoekpunt	3 vierkanten in elk hoekpunt	4 driehoeken in elk hoekpunt	3 vijfhoeken in elk hoekpunt	5 driehoeken in elk hoekpunt

Dat worden de *Platonische veelvlakken* genoemd.

De Platonische veelvlakken hebben altijd een grote fascinatie op de mens uitgeoefend. Er zijn allerlei magische eigenschappen aan toegedicht. Ze hebben model gestaan voor de vier elementen en het heelal.

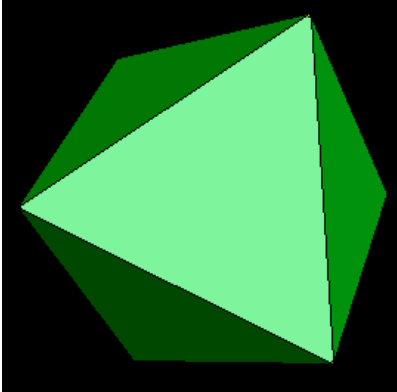


Kubus	Tetraëder	Dodecaëder	Icosaëder	Octaëder
Aarde	Vuur	Heelal	Water	Lucht

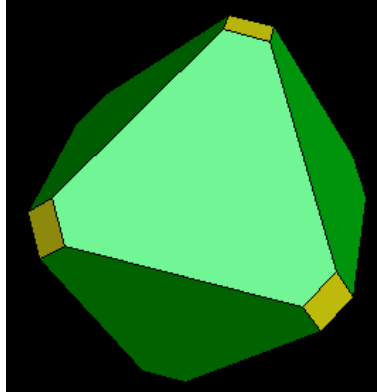
II. De Archimedische lichamen

Uit de 5 Platonische figuren kunnen we andere figuren maken door hoekpunten af te snijden.

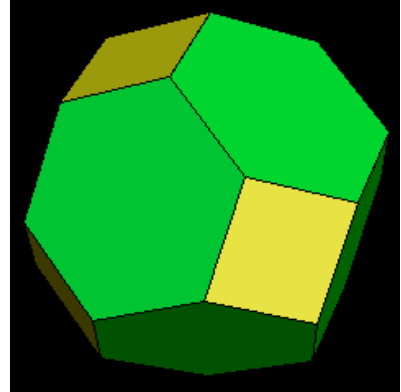
Neem een **Octaëder**



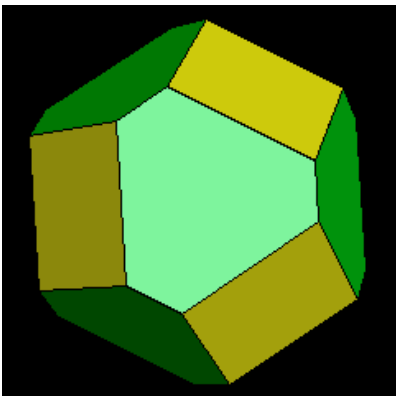
Begin de hoeken af te zagen.



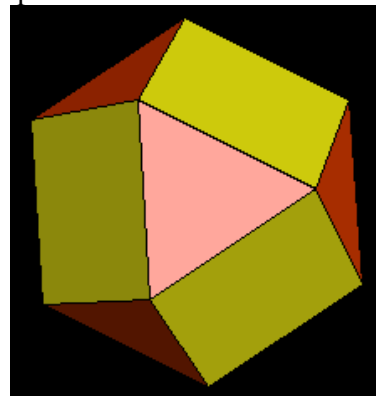
Dan ontstaat de **Afgeknotte Octaëder** met in elk hoekpunt 2 zeshoeken en 1 vierhoek



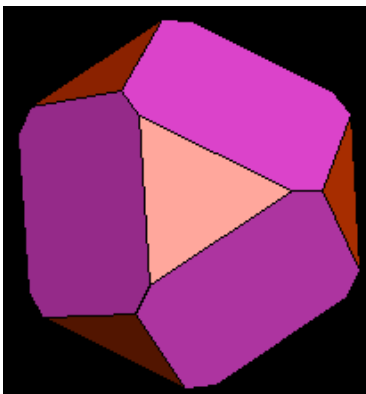
Ga door met verder afzagen



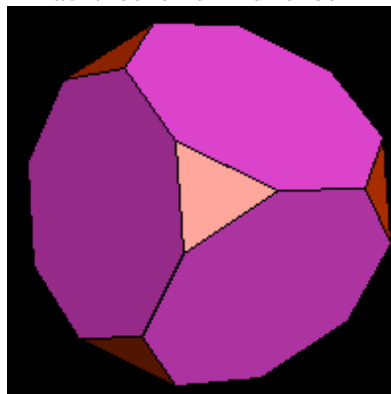
Dan ontstaat de **Cubo-Octaëder** met in elk hoekpunt 2 driehoeken en 2 vierhoeken.



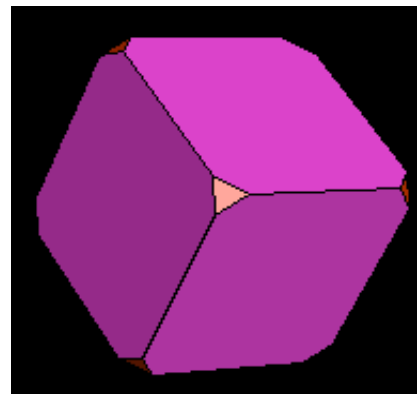
Ga door met verder afzagen



Dan ontstaat de **Afgeknotte Kubus** met in elk hoekpunt 2 achthoeken en 1 driehoek



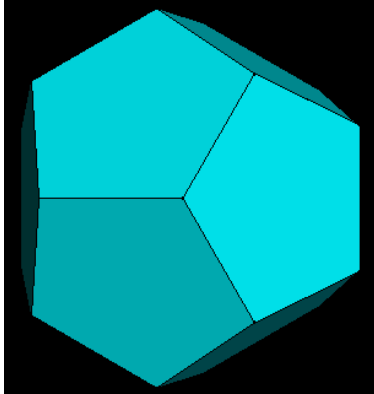
Er blijft een **Kubus** over.



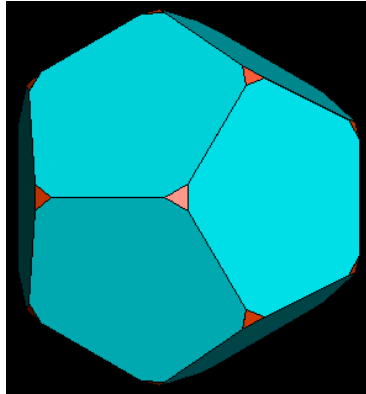
De **kubus** en de **Octaëder** zijn dus met elkaar verbonden.
Door hoeken af te snijden ontstaat de ene uit de andere.

We hadden ook met een Dodecaëder kunnen beginnen.

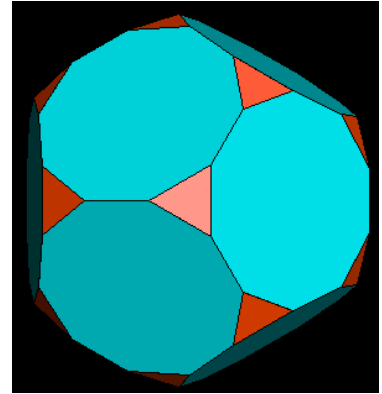
Neem een **Dodecaëder**



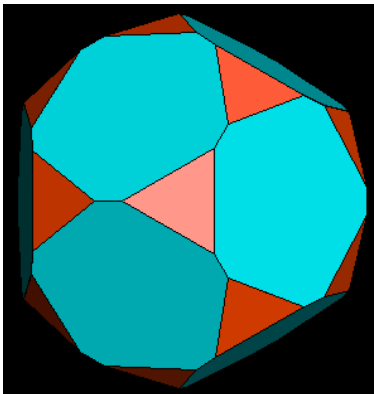
Begin de hoeken af te zagen.



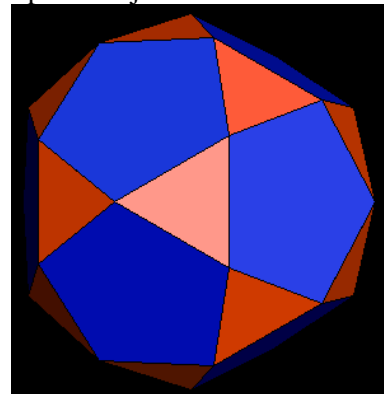
Dan ontstaat de **Afgeknotte Dodecaëder** met in elk hoekpunt 2 tienhoeken en 1 driehoek



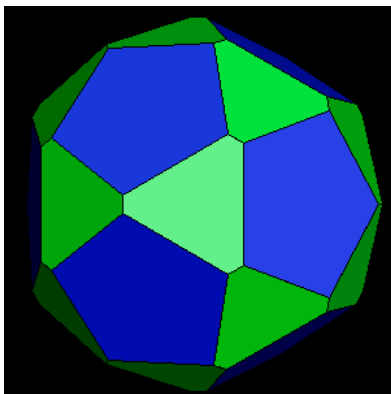
Ga door met verder afzagen



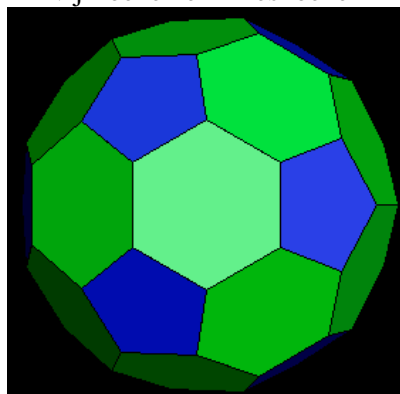
Dan ontstaat de **Icosidodecaëder** met in elk hoekpunt 2 vijfhoeken en 2 driehoeken



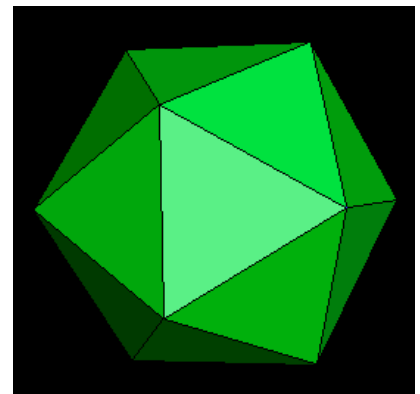
Ga door met verder afzagen



Dan ontstaat de Afgeknotte **Icosaëder** met in elk hoekpunt 1 vijfhoek en 2 zeshoeken

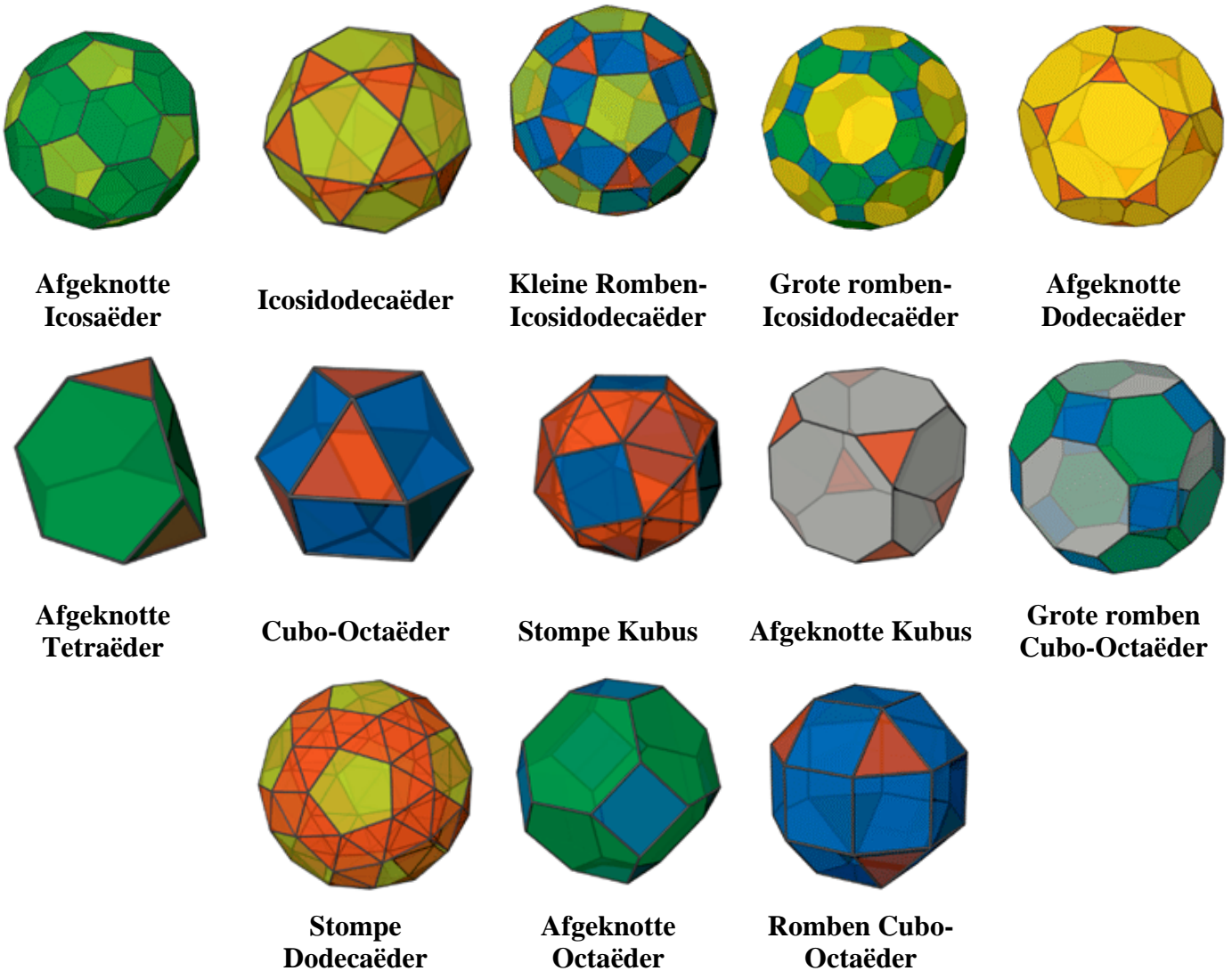


En uiteindelijk houden we een **Icosaëder** over.

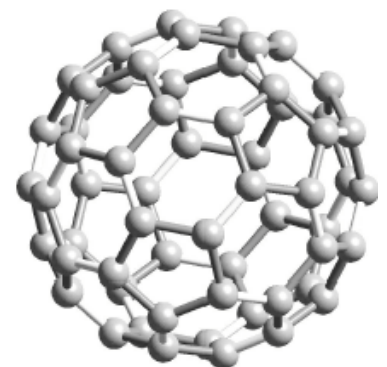


De **Octaëder** en de **Icosaëder** zijn dus ook met elkaar verbonden. Door hoeken af te snijden ontstaat de ene uit de andere.

Door de hoeken af te zagen, af te *knotten* ("Truncation") ontstaan uit de 5 Platonische lichamen de 13 Archimedische lichamen.



De Afgeknotte Icosaëder) is ook beroemd geworden onder de naam *Buckminsterfullerene* of *Buckyball*, een nieuwe moleculaire vorm van koolstof C₆₀. In 1996 is de Nobelprijs in scheikunde toegekend aan de ontdekkers van deze nieuwe chemische verbindingen.



III. De vierde dimensie

Driedimensionale objecten kunnen wij zien. Tenminste, de voorkant ervan want écht het hele voorwerp zien kunnen we niet. Maar uit wat we zien aan de voorkant van bijvoorbeeld een kubus begrijpen we wel zo'n beetje hoe de achterkant er uit ziet.

Vierdimensionale voorwerpen kunnen wij helemaal niet zien. Wat is de vierde dimensie? Daar is eigenlijk geen antwoord op te geven.

In de wiskunde is het makkelijk om te praten over 1 dimensie, zoals een lijn, twee dimensies zoals een vlak, drie dimensies zoals een kubus, en dan gewoon doorgaan met vier dimensies zoals een hyperkubus. En we kunnen gewoon doorgaan! Vijf dimensies, zes dimensies, in de wiskunde bestaan ze. In de *natuurkunde* zou je kunnen zeggen dat de tijd een vierde dimensie is. Maar de tegenwoordige natuurkunde gaat er van uit dat onze wereld zelfs 11 of 13 dimensies heeft. Dat is helemaal onvoorstelbaar.

Vierdimensionale voorwerpen kunnen wij niet zien. Bestaat iets eigenlijk wel als je het niet kunt zien of kunt voorstellen?

Toen we nog als jagers rondtrokken telden we onze vangst: Vandaag 5 herten en 3 everzwijnen. Daar kon je mee thuiskomen. Iedereen kon zich daar veel bij voorstellen. Maar je was gek als je zei dat je daarvan 6 herten en 4 everzwijnen ging weggeven. Dat kon niet, dan hield je minder dan niets over, bij een negatief getal kon niemand zich iets voorstellen.

Maar tegenwoordig vinden we het heel gewoon dat het 2° boven nul is en dat het 's nachts nog 5 graden kouder zal worden. Dan wordt het die nacht -3° . We zijn er helemaal aan gewend geraakt om met negatieve getallen te rekenen. Ook al kunnen we nooit -3 everzwijnen vangen!

En pizza's kunnen we prima in tweeën of in drieën verdelen. Dan krijgt iedereen een $\frac{1}{2}$ of $\frac{1}{3}$ pizza. Breuken zoals $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$ konden de Babyloniërs 3000 jaar geleden al bij elkaar optellen. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

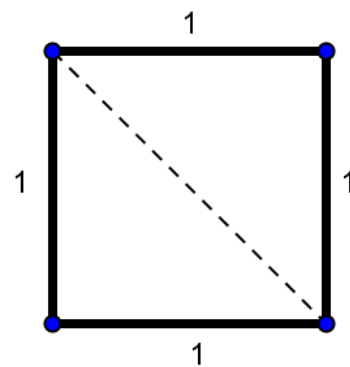
Maar de Grieken schrokken wel toen ze ontdekten dat de lengte van de diagonaal van een vierkant tussen de $\frac{7}{5}$ en $\frac{3}{2}$ ligt maar dat er geen enkele breuk is die precies overeenkomt met die lengte.

Die lengte is een vreemd getal. Het is geen heel getal, het is geen breuk, het is een nieuw soort getal en we noemen het "de wortel uit 2"

Ook dit getal kunnen we nooit "zien", we kunnen het ons niet goed voorstellen, het is *ongeveer* 1,414213562373095 maar je kunt altijd nóg meer cijfers achter de komma opschrijven.

Voorstellen kan je zo'n getal niet maar er over nadenken kan wél!
Als je het met zichzelf vermenigvuldigd bijvoorbeeld komt er 2 uit!

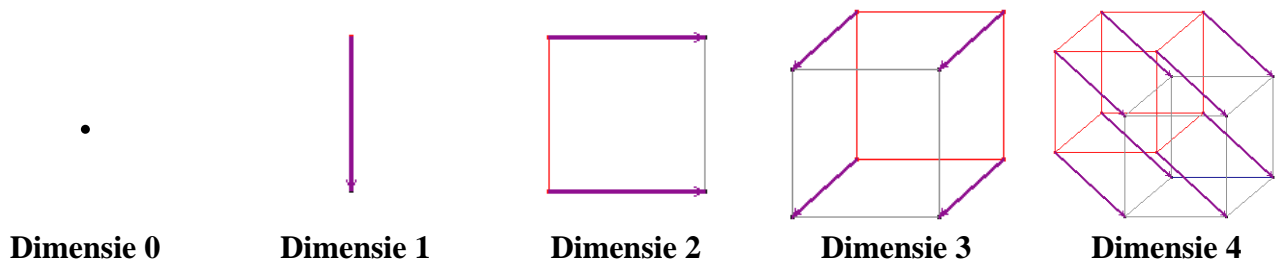
En zo is het ook met de vierde dimensie. Zien kunnen we die niet maar er over denken kan wel!



IV. De hyperkubus en de Simplex

Hoe kun je het dan wél voorstellen? Door *analogie* ofte wel door te kijken naar de overeenkomst.

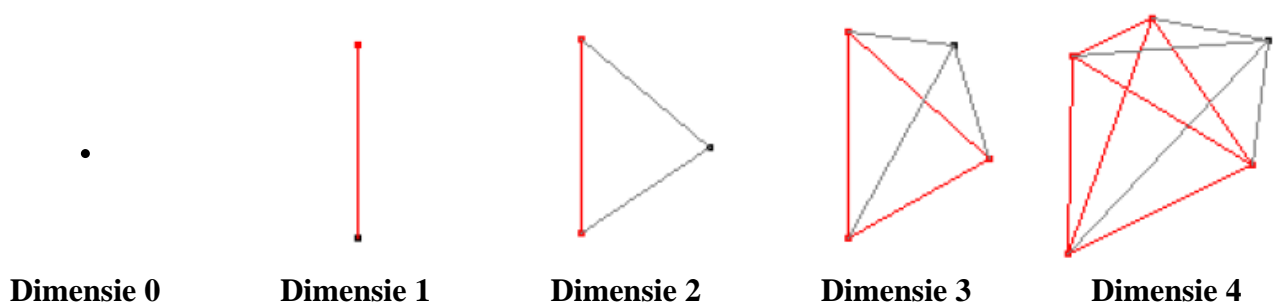
- De 0^e dimensie is een punt. Als we dat punt oppakken en buiten die 0^e dimensie plaatsen en met het oorspronkelijke punt verbinden krijgen we een **lijn**. Die is 1-dimensionaal.
- Als we nu die lijn oppakken en buiten die 1^e dimensie plaatsen en met de oorspronkelijke eindpunten verbinden krijgen we een **vlak**. Dat is 2-dimensionaal
- Als we nu dat vlak oppakken en buiten die 2^e dimensie plaatsen en weer de nieuwe hoekpunten met de oorspronkelijke punten verbinden krijgen we een **cel** n.l. de kubus. Die is 3-dimensionaal.
- En als we de kubus oppakken en buiten die 3^e dimensie plaatsen en weer de nieuwe hoekpunten met de oorspronkelijke punten verbinden krijgen we een **hyperkubus** of **Tesseract** en die is 4-dimensionaal.



Zien kunnen we die niet, vóórstellen wel. De hyperkubus móet wel 16 hoekpunten hebben, 32 ribben, 24 vlakken en 8 cellen hebben.

Op dezelfde manier kunnen we ook een andere vierdimensionale figuur bedenken.

- De 0^e dimensie is een punt. Als we dat punt oppakken en buiten die 0^e dimensie plaatsen en met het oorspronkelijke punt verbinden krijgen we een **lijn**. Die is 1-dimensionaal.
- Als we nu een punt buiten die 1^e dimensie plaatsen en met de oorspronkelijke eindpunten verbinden krijgen we een **vlak**, een **driehoek**. Dat is 2-dimensionaal
- Als we nu een punt buiten die 2^e dimensie plaatsen en verbinden met de vorige drie krijgen we een **cel** n.l. de tetraëder. Die is 3-dimensionaal.
- En als we dit voortzetten krijgen we de vierdimensionale tetraëder, de **Simplex** of **Pentachoron**.



V. De zes 4-dimensionale Platonische objecten.

In vier dimensies bestaan er nog meer regelmatige figuren.

En ook die kunnen we ons een beetje voorstellen door te kijken naar *analogie*.

De 5 Platonische lichamen maakten we door na te gaan hoeveel driehoeken, vierkanten, vijfhoeken en zeshoeken er rond een **punt** passen.

- Drie **driehoeken** in een hoekpunt geeft de **tetraëder**.
- Vier **driehoeken** in een hoekpunt geeft de **octaëder**.
- Vijf **driehoeken** in een hoekpunt geeft de **icosaëder**.
- Drie **vierhoeken** in een hoekpunt geeft de **kubus**
- Drie **vijfhoeken** in een hoekpunt geeft de **dodecaëder**.

Deze manier om figuren te maken kunnen we ook in vier-dimensies doen door na te gaan hoeveel en welk type cel rond een **ribbe** past. Er blijken dan **6** regelmatige vierdimensionale objecten te bestaan. Ze werden ontdekt door de Zwitserse wiskundige Ludwig Schläfli rond 1850.

- Drie **tetraëders** rond een ribbe geeft de **5-cel**, de **penta-choron**, ook wel **Simplex** genoemd.
- Drie **kubussen** rond een ribbe geeft de **8-cel**, ook wel **Hyperkubus** genoemd.
- Vier **tetraëder** rond een ribbe geeft de **16-cel**, de **hexadeca-choron**, ook wel **Kruisfiguur** genoemd.
- Drie **octaëders** rond een ribbe geeft de **24-cel**, de **icositetra-choron**
- Drie **dodecaëders** rond een ribbe geeft de **120-cel**, de **hecatonicosa-choron**
- Vijf **tetraëders** rond een ribbe geeft de **600-cel**, de **hexacosi-choron**

De zes 4-dimensionale lichamen en hun eigenschappen					
Naam		Rond een ribbe:	Vlakken	Ribben	Hoeken
5-cel	Pentachoron	3 Tetraëders	10 driehoeken	10	5
16-cel	Hexadecachoron	4 Tetraëders	32 driehoeken	24	8
600-cel	Hexacosichoron	5 Tetraëders	1200 driehoeken	720	120
8-cel	Tesseract (Hyperkubus)	3 Kubussen	24 vierkanten	32	16
24-cel	Icositetrachoron	3 Octaëders	96 driehoeken	96	24
120-cel	Hecatonicosachoron	3 Dodecaëders	720 vijfhoeken	1200	600
---	---	Icosaëders	---	---	---

Vooraf de 120 cel en de 600 cel zijn spectaculair! Een simpele Hyperkubus heeft 8 cellen en 16 hoekpunten. Maar zo'n 120-cel heeft maar liefst 600 hoekpunten!

Als we naar ruimtes gaan kijken met 5 of meer dimensies, vinden we dat er telkens maar 3 regelmatige veelvlakken zijn. De eerste is de Simplex in hogere dimensies. Deze heeft $n+1$ hoekpunten waarbij n het aantal dimensies voorstelt.

Het tweede regelmatige veelvlak is de Kubus. Deze heeft altijd $2n$ hoekpunten.

Het derde regelmatige veelvlak is de 16-cel in hogere dimensies. Méér zijn er niet.

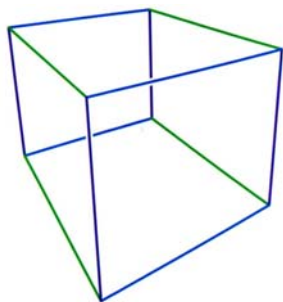
De spannendste en rijkste dimensie is dus de vierde dimensie! Het wordt alleen maar simpeler naarmate je dimensies toevoegt!

VI. Centraal Projectie van vierdimensionale objecten.

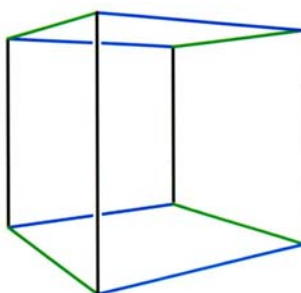
Eén van de manieren om een vierdimensionaal object toch te kunnen “zien” is door het te projecteren.

Als we een kubus zouden willen laten zien aan een Platlander, een wezen dat alleen maar in twee kan waarnemen, dan zouden we een kubus tekenen op papier. We tekenen dan een *projectie*.

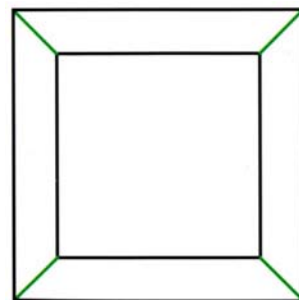
Een kubus kan op verschillende manieren en vanuit verschillende hoeken geprojecteerd worden.



Projectie met 3 verdwijnpunten

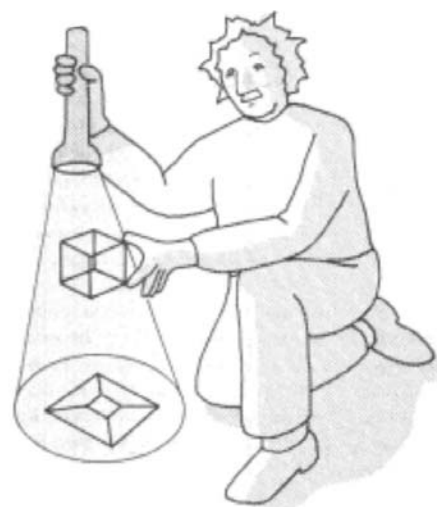


Projectie met 2 verdwijnpunten

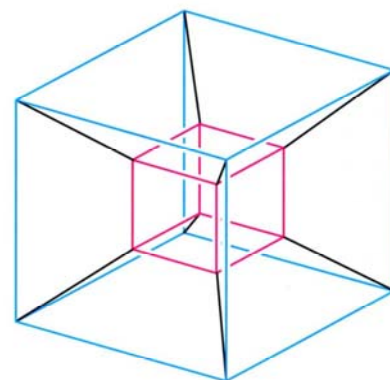


Projectie met 1 verdwijnpunt
(Centrale projectie)

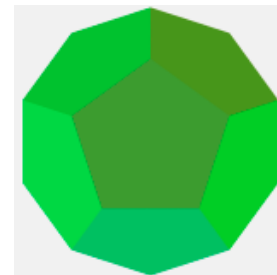
In *Centrale projectie* zien we een driedimensionale kubus geprojecteerd in **twee** dimensies als één centraal viervlak met daaromheen 4 afgeplatte viervlakken.



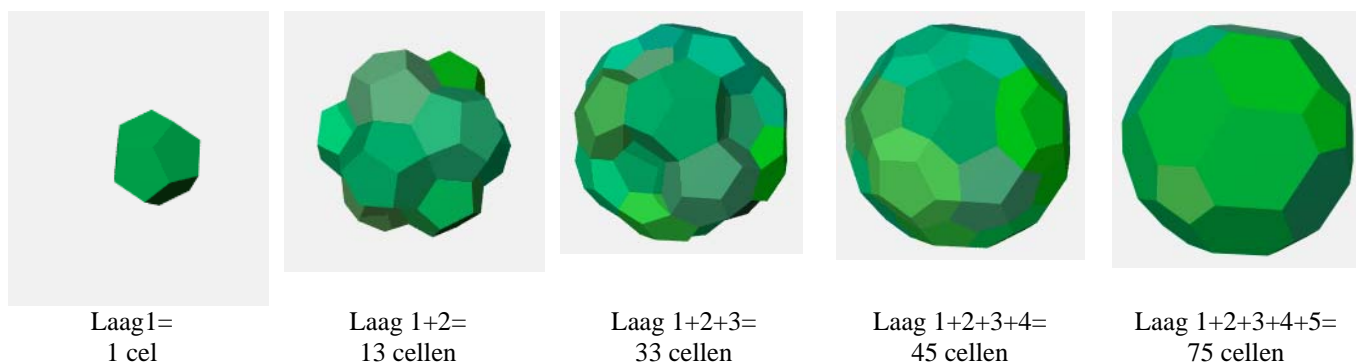
Als we nu een **vier**dimensionale Hyperkubus in *Centrale projectie* afbeelden in onze **driedimensionale** wereld dan zien we een centrale kubus en daar omheen afgeplatte kubussen.



En als we een **driedimensionale** Dodecaëder willen laten zien aan een *Platlander*, zouden we door *Centraal projectie* in twee dimensies een vijfhoek zien met daaromheen 5 afgeplatte vijfhoeken.



En precies zó zien we van een **vierdimensionale** 120-cel in *Centrale projectie* in **drie** dimensies eerst één centrale dodecaëder, daaromheen een laag van 12 dodecaëders, daaromheen een derde laag van 20 steeds sterker afgeplatte dodecaëders, een vierde laag van 12 bijna platte en een laatste laag van 30 dodecaëders die nu helemaal plat zijn.



En na de buitenste laag gaat de projectie eigenlijk verder maar nu weer naar binnen. Laag 1 t/m 6 heeft 87 cellen, 1 t/m 7 107 cellen, laag 1 t/m 8 119 cellen en met de allerlaatste centrale cel komen we op 120 cellen.

VII. De halfregelmatige vierdimensionale objecten.

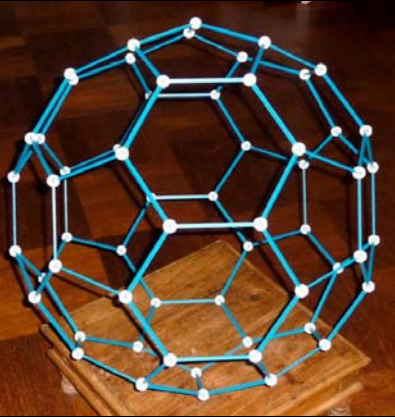
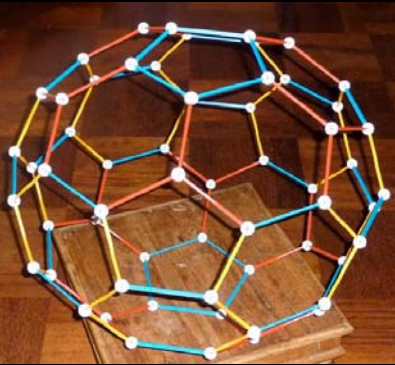
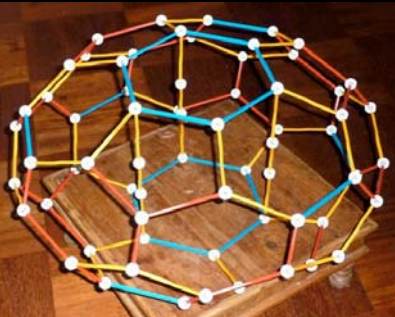
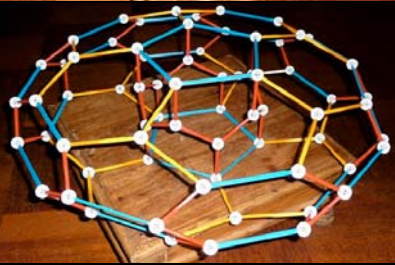
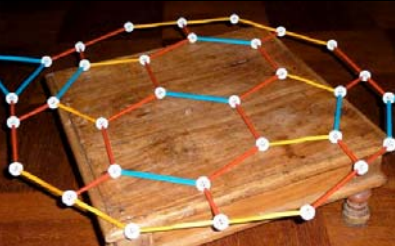
De 6 *regelmatige* vierdimensionale objecten zijn uit *regelmatige* driedimensionale cellen opgebouwd. De tetraëder, de kubus, de octaëder en de dodecaëder. Maar we kunnen van *afgeknotte driedimensionale* of algemener van *half-regelmatige* cellen uitgaan. Toen men dit eenmaal begreep in 1880 ontstond een wedloop wie als eerste alle *half-regelmatige* lichamen zou beschrijven. Die zoektocht gaat nog steeds door! Op dit moment zijn er 1849 vierdimensionale polychoron's bekend!

Ze hebben de meest fantastische namen zoals Afgeknotte Pentachoron en Dubbel Afgeknotte Hyperkubus.

Eén van de mooiste objecten is de Afgeknotte Icosahedrische prismatohexacosihecatonicosachoron of te wel de Cantitruncated 600 cel.

Dit vierdimensionale object bestaat uit 120 afgeknotte icoesaëders, 600 afgeknotte octaëders en 720 tienhoekige prisma's. Het telt 3600 vierkanten, 1440 vijfhoeken en 3600 zeshoeken. Het heeft 14.400 ribben en 7200 vlakken. Er zijn 10.800 onderdelen nodig! 1860 blauwe staafjes, 2400 gele staafjes, 2880 rode staafjes en 3660 witte kogels.

VIII. Opbouw: van de Cantitruncated 600 cel

<p>Centrale unit: 1 afgeknotte icosaeëder</p>			
<p>12 enigszins in elkaar gedrukte afgeknotte icosaeëders</p>			
<p>20 sterker in elkaar gedrukte afgeknotte icosaeëders</p>			
<p>12 bijna plat gedrukte afgeknotte dodecaëders</p>			
<p>30 volledig platgedrukte afgeknotte icosaeëders</p>			

IX. Geschiedenis van ontdekking

- **Regelmatige convexe polytopen:**
 - **1852:** Ludwig Schläfli bewees in zijn manuscript *Theorie der vielfachen Kontinuität*, dat er precies 6 regelmatige polytopen in 4 dimensies bestaan en slechts 3 in 5 of meer dimensies.
- **Regelmatige ster-polychora**
 - **1852:** Ludwig Schläfli vond ook 4 van de 10 regelmatige sterpolychora,
 - **1883:** Edmund Hess voltooide de lijst van 10 niet-convexe regelmatige polychora.
- **Half-regelmatige convexe polytopen**
 - **1900:** Thorold Gosset stelde de lijst op van nonprismatische halfregelmatige convexe polytopen op.
- **Convexe eenvormige polytopes:**
 - **1910:** Alicia Boole Stott breidde in haar publicatie "*Meetkundige deductie van halfregelmatige polytopen*" de definitie uit door ook 4 dimensionale Archimedische polychora toe te staan. Zij had een uitzonderlijk vermogen om zich deze objecten voor te stellen. Zij introduceerde in 1910 het woord "Polytoop" en werkte samen met H.S.M. Coxeter.
 - **1940:** Het onderzoek werd uitgebreid door systematisch onderzoek van H.S.M. Coxeter in zijn publikatie *Regelmatige en semi-Regelmatige Polytopen*.
 - **Convexe eenvormige polychora:**
 - **1965:** De volledige lijst van convexe vormen werd definitief voltooid door John Horton Conway en Michael J.T. Kerel
 - **1997:** Een volledige opsomming van de namen en de elementen van convexe eenvormige polychora werd on-line gegeven door George Olshevsky
 - **2004:** Een bewijs dat de Conway-Kerel reeks volledig is werd gepubliceerd door Marco Möller in zijn verhandeling, *Vierdimensionale Archimedische Polytope* (in het Duits).
 - De mogelijkheden om zulke polytopen af te beelden bleven beperkt. Door Paul S. Donchian werden in de jaren 30 enkele 'wireframes' vervaardigd. In 1992 kwam het constructiesysteem Zometool op de markt. Door het 31-gaten systeem met slim gekozen hoeken en lengteverhoudingen (Gulden Snede!) bleek het mogelijk om Centraal Projecties te bouwen van alle 15 H4 polytopen.
